# Понятие Марковского случайного процесса. Цепь Маркова.

По характеру случайного процесса, протекающего в системе массового обслуживания, различают система марковские и не марковские. Исследование СМО значительно упрощается, если в ней протекает марковский случайный процесс.

*ОПР.*

Случайный процесс, протекающий в некоторой системе называется Марковским или процессом без последействия, если для каждого момента времени поведение системы в будущем зависит только от состояния системы в данный момент времени и не зависит от того, каким образом система пришла в это состояние. Иными словами в марковских случайных процессах будущее состояние целиком определяется его настоящим состоянием, прошлое на него никак не влияет. Это свойство называется **СВОЙСТВОМ ОТСУТСТВИЯ ПОСЛЕДЕЙСТВИЯ** или **МАРКОВСКИМ СВОЙСТВОМ.**

Пусть имеется некоторая система S, которая может находиться в состояниях S1, S2,…, Sn. Пусть переходы системы из одного сост. в другое происходят мгновенно и только в заранее фиксированные моменты времени шаги, которые можно пронумеровать. Таким образом в системе протекает случайный процесс с дискретными состояниями и дискретным временем.

*ОПР.*

Марковский случайный процесс с дискр. сост-ми и дискр. Временем называют **ДИСКРЕТНОЙ МАРКОВСКОЙ ЦЕПЬЮ** или **ЦЕПЬЮ МАРКОВА.** Обозначим через Ski событие, состоящее в том, что на k-том шаге система будет находиться в состоянии Si.(K=1,2.., I=1..n)

*ОПР.*

Вероятность события Ski, состоящего в том, что система на k-ом шаге будет находиться в сост. Si называют **вероятностью i-го состояния на k-ом шаге и обозначают Pi(k).** Вероятности состояния системы в совокупности образуют вектор P(k)=(P1(k),P2(k),..,Pn(k))

*ОПР.*

Вектор P(0)=P1(0),P2(0),..,Pn(0), Где Pi(0) –вероятность появления сост. Si в начальном испытании, называют **вектором начальных вероятностей**.

Очевидно, что на любом шаге процесс может находиться в одном и только одном из n возможных состояний S1,S2,..,Sn, следовательно при любом k событие Sk1,Sk2,..Skn будут единственно возможны и несовместны, то есть образуют полную группу. По этому для каждого шага k имеет место равенство **P1(k)+P2(k)+..+Pn(k)=1**.

*ОПР.*

Переходными вероятностями называют вероятности перехода системы из любого состояния в любое состояние за один шаг. Некоторые из переходных вероятностей могут быть равны нулю, если непосредственный переход за один шаг невозможен.

*ОПР.*

Марковскую цепь называют однородной, если переходные вероятности не зависят от номера шага. В противном случае марковскую цепь называют **неоднородной**. Будем считать марковскую цепь однородной. Обозначим через Pij вероятность перехода системы **за один шаг** из состояния Si в сост Sj.

*ОПР.*

Матрицей перехода за один шаг называют матрицу, которая содержит все переходные вероятности этой системы за один шаг.

П1 =(P11, P12,..P1n

P21,P22,..P2n

P31, P32,..,Pnn)

Некоторые из переходных вероятностей Pij могут быть равны нулю, что означает невозможность перехода системы из i-го сост. в j-е за один шаг. По главной диагонали матрицы состоят вероятности того, что система останется в том же состоянии. В каждой строке матрицы помещены вероятности событий, образующих полную группу, поэтому сумма всех Pij=1.

Марковскую цепь изображают в виде графа переходов, вершина которого соответствует состоянию цепи, а дуги – переходы между ними. Вес дуги, связывающей вершины Si с Sj равен вероятности Pij.

# Равенство Маркова

Обозначим через Pij(k) вероятность перехода системы из сост Si в сост Sj за k шагов.

При k=1 получим Pij(1)=Pij

Поставим задачу: зная переходные вероятности за один шаг, найти вероятности перехода из Si в Sj за k шагов, т.е. найти Pij.

Введем в рассмотрение промежуточное состояние Sr. Будем считать, что из первоначального сост Si за n шагов система перейдет в промежуточное сост Sr с вероятностью Pir(m). После чего за оставшееся количество k-m система перейдет из промежуточного сост Sr в конечное сост Sj с вероятностью Prj(k-m).

## Теорема:

Пусть событие А может произойти только при условии появления одного из событий H1, H2,..Hn, образующих полную группу т.к. заранее неизвестно, какое именно из этих событий наступит, их называют гипотезами. Тогда вероятности наступления события А равно P(A)=P(H1)\*P(A)+P(H2)\*P(A)+..+P(Hn)\*P(A).

Введем обозначения: А – за k шагов система перейдет из сост Si в сост Sj. Следовательно вероятность события P(A)=Pij(k). Hr – за m шагов система перейдет из сост Si в сост Sr. Следовательно P(Hr)=Pir(m).

P(A) при Hr – условная вероятность наступления события А при условии, что имело место условие Hr за k-m шагов система перейдет из промежуточного состояние Sr в конечное сост Sj. P(A)=Prj(k-m).

Pij(k)=Сумма при n=1..n (Pir(m)\*Prj(k-m))

Покажем, что зная переходные вероятности за один шаг, т.е. зная матрицу П1 можно найти переходные вероятности за два шага, т.е. матрицу П2, далее П3 и тд. Для этого положим в равенстве Маркова k=2 и m=1. Pij(2)=Sum r=1..n (Pri(1)\*Prj(2-1))

Pij(2)=Sum r=1..n (Pir\*Prj) . По этой формуле можно найти все вероятности Pij(2), следовательно и матрицу П2.

П2=П1\*П1=П1^2 . Положив в равенстве Маркова K=3 и m=2 аналогично получим, что П3=П1\*П2, т.е. П1^3.

Пk=П1k для любого k.

Если известны вектор начального распределения вероятности и матрица переходов вероятности, то можно вычислить вероятности состояния системы для любого шага k.

P(k)=P(0)\*П1k.

Т.о. Цепь Маркова считается заданной, если:

1) имеется вектор начальных вероятностей, описывающий начальное состояние системы

2) известна матрица перехода вероятностей

Пример:

Ставка 2%, 3%, 4% может изменяться только в начале следующего квартала. Анализ работы в предыдущие годы показал, что изменение переходных вероятностей с течением времени пренебрежимо мало. Определить вероятность состояния банка на конец текущего года, если в конце прошедшего ставка = 3%, а матрица переходных вероятностей П1 имеет вид:

П1=(0,4 0,4 0,2

0,2 0,5 0,3

0,1 0,3 0,6)

S1= 2% P(4)- ? (квартал - 4)

S2=3% P(0)= (0 , 1 , 0)

S3=4% P(4)= P(0)\* П1^4=(0,202 , 0,402 , 0,397)

# Классификация состояний Марковской цепи.

## Достаточное условие эргодичности.

При рассмотрении цепей Маркова важно изучить поведение системы на большом интервале времени, когда число переходов стремится к бесконечности.

Марковские цепи классифицируются в зависимости от возможности переходов из одних состояний в другие.

*ОПР.*

Состояние Sj называют достижимым из состояния Si, если вероятность перехода системы из i в j за конечное число шагов положительна.

*ОПР.*

**Состояния** Si и Sj, достижимые друг из друга, называют **сообщающимися**.

*ОПР.*

Цепь Маркова называют неприводимой, если все ее состояния сообщаются друг с другом.

*ОПР.*

Состояние Si называют возвратным, если вероятность того, что система, выйдя из этого состояния, вернется в него за конечное число шагов, равна 1. Если же эта вероятность меньше 1, то состояние называют **невозвратным**.

*ОПР.*

Возвратное состояние, для которого возвращение возможно лишь через число шагов, кратное d (d!=1), называют **периодическим**.

*ОПР.*

Эргодическим состоянием называют возвратное непериодическое состояние, для которого среднее время возвращение конечно.

*ОПР.*

Эргодическая Марковская цепь – Марковская цепь, все состояния которой являются эргодическими.

Процесс, порождаемый эргодической цепью, начавшись в некотором состоянии никогда не завершается, а последовательно переходит из одного состояния в другое, попадая в различные состояния с разной частотой, зависящей от переходных вероятностей.

*ОПР.*

Состояние Si называют поглощающим, если вероятность перехода из этого состояния в любое другое равна 0, т.е. Pij=1.

Теорема: (достаточное условие эргодичности

Эргодическая Марковская цепь обладает важными свойствами:

При неограниченным увеличением числа шагов, переходные вероятности стремятся к некоторым постоянным числам.

## Теорема:

Если существует такое число m>0, при котором все элементы матрицы Пm переходов за m шагов положительны, то существуют такие постоянные числа Pj (j=1,2..n),что

Lim Pij…

Величины Pj называются предельными или финальными вероятностными системы

Предельные вероятности характеризуют среднюю долю времени, в течение которого система находится в данном состоянии при наблюдении в течение достаточно продолжительного времени. Заметим, что сумма этих вероятностей будет равняться 1. (1) Обозначим эти вероятности через вектор P=(p1,p2,..,pn)

P=P\*П1. (2)

Записанная в матричном виде система (2) является системой линейных уравнений с n неизвестными p1 , p2 , .. , pn. Учитывая условие (1) одно из уравнений системы (2) можно отбросить. Отбросим последнее уравнение и запишим систему уравнений в явном виде:

Фото в телефоне